Шарыгин Георгий Игоревич
Выпускник МГУ, кандидат физико-математических наук, преподаватель СУНЦ МГУ, сотрудник ИТЭФ. *Автор был частично поддержан грантами РФФИ 04-01-00702 и НШ-8004.2006.2.*

Вписанные и описанные четырёхугольники

Целью этой статьи является знакомство читателя с критериями существования вписанной и описанной окружностей у четырёхугольника и с отдельными свойствами таких четырёхугольников. Мы приводим как элементарные (то есть встречающиеся в некоторых учебниках), так и нестандартные, красивые, требующие нетривиальных дополнительных построений, доказательства этих критериев. Одним из достоинств приведённых нестандартных доказательств является их независимость от свойств параллельных линий. В частности, они работают на сфере и на плоскости Лобачевского.

1. Свойства вписанных углов, примеры

Каждому школьнику, наверное, известно, что с любым треугольником можно связать две окружности: вписанную и описанную. Первая из них касается всех сторон треугольника, а вторая проходит через все его вершины. С этими окружностями связано много замечательных теорем. Свойства описанной и вписанной окружностей удобно применять для решения многих школьных задач и задач вступительных экзаменов. Использовать их часто полезно даже в том случае, когда непосредственно в условии эти окружности не упомянуты.

Однако то, что работает для любого треугольника, неверно во всех остальных случаях: далеко не у всех многоугольников, даже четырёхугольников, наличествует хотя бы одна из указанных окружностей. Тем полезнее для решения задачи оказывается применение свойств описанной или вписанной окружностей, когда эти окружности существуют.

В этой статье мы даём несколько удобных работающих критериев существования вписанной и описанной окружностей у четырёхугольника.

Некоторые из них мы оформим в виде задач для самостоятельного решения.

Начнём со следующей простой

задачи. Попробуйте сначала решить её самостоятельно, не читая дальше статью.

Задача 1. Докажите, что если у параллелограмма есть описанная окружность, то он является прямоугольником, а если есть вписанная – ромбом.

Решать эту задачу можно поразному. Например, во втором случае нетрудно заметить, что каждая из высот параллелограмма, в который можно вписать окружность, равна диаметру этой окружности. А в первом случае (т. е. если есть описанная окружность) удобно применить следующие свойства углов, вписанных в окружность.

Теорема 1. Угол, вписанный в некоторую окружность, равен половине центрального угла той же окружности, опирающегося на соответствующую дугу (рис. 1).

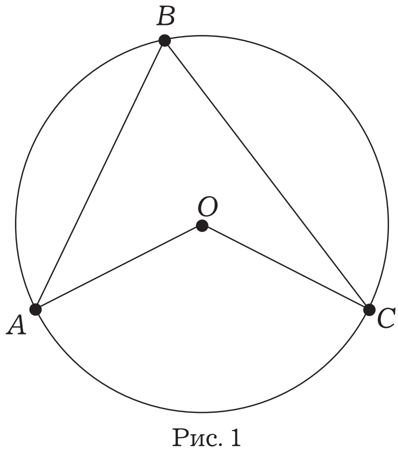

Рис. 1

Это простое утверждение, доказательство которого можно найти в любом школьном учебнике, чрезвычайно важно для всего курса геометрии. Можно сказать, что значительная часть школьной (и не только школьной) планиметрии основана на далёких следствиях из этого факта. Отметим два очевидных следствия из теоремы 1.

Следствие 1. Два вписанных угла, опирающиеся на равные дуги, равны между собой. В частности, два угла, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (рис. 2).

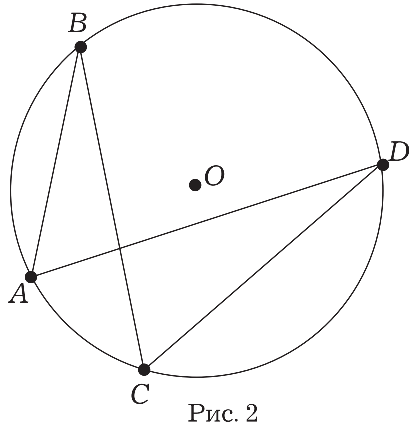

Рис. 2

Следствие 2. Гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром окружности, описанной около этого треугольника. Таким образом, центром этой окружности служит середина гипотенузы, а её радиус равен половине гипотенузы (рис. 3).

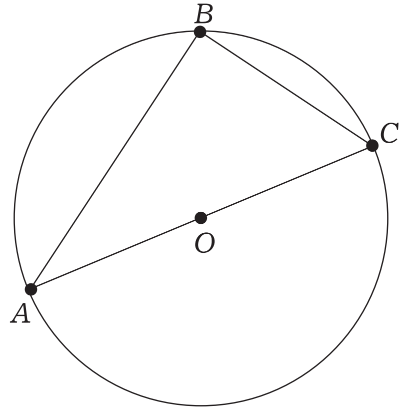

Рис. 3

Уже этих двух следствий бывает достаточно, чтобы решать многие интересные задачи. Рассмотрим, например, следующую.

Задача 2. Три прямые на плоскости пересекаются в одной точке таким образом, что все попарные углы между ними равны (и равны, таким образом, 60°). Из точки М, не лежащей ни на одной из этих прямых, опущены перпендикуляры на эти прямые. Докажите, что треугольник с вершинами в основаниях этих перпендикуляров – правильный.

Решение. Пусть точки A, B и C – основания опущенных из M перпендикуляров, а O – точка пересечения прямых. Рассмотрим треугольники OAM, OBM, OCM. Они прямоугольные с общей гипотенузой OM. Согласно следствию 2 это значит, что описанные окружности этих треугольников совпадают. Таким образом, все отмеченные точки O, M, A, B и С лежат на одной окружности (рис. 4). Рассмотрим теперь углы

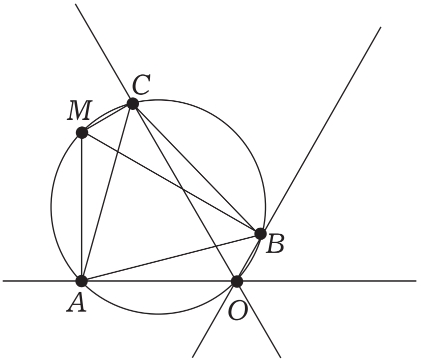

Рис. 4

AOC и ABC. Согласно вышедоказанному, эти углы вписаны в одну и ту же окружность и опираются на одну и ту же дугу AC. Следовательно (следствие 1), они равны, $\angle ABC = \angle AOC = 60^\circ$. Аналогичным образом находим, что $\angle BAC = \angle BOC = 60^\circ$. Отсюда $\angle BCA = 60^\circ$. А это значит, что треугольник ABC – правильный.

Ключевой момент приведённого решения – то место, где на основании следствия 2 мы заключаем, что некоторые точки лежат на одной окружности, т. е. образованный ими четырёхугольник – вписанный. Полезно сформулировать наблюдение, которое привело нас к этому заключению, отдельно.

Теорема 2. Если углы ABC и ADC – прямые, то точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

Теорема 2 – один из многочисленных признаков вписанного четырёхугольника. Уточним, что тут мы несколько вольно трактуем словосочетания «признак фигуры» или «признак некоторого свойства фигуры» как утверждения, позволяющие заключить, что данная фигура обладает указанным свойством (в данном случае – свойством быть вписанным в окружность). Иными словами, как *достаточное условие* выполнения указанного свойства. Следует помнить, что в более строгом математическом смысле признак – это свойство, *эквивалентное* рассматриваемому. В данном случае, конечно, далеко не у любого вписанного четырёхугольника можно найти прямые углы, даже если позволить переименовывать вершины произвольным образом. В этом отличие теоремы 2 от тех теорем, которые докажем далее.

Несмотря на то, что этот признак (теорема 2) заведомо работает не всегда, он часто бывает очень полезен при решении задач.

Задача 3[1]**.** Докажите, что в любом треугольнике высоты пересекаются в одной точке.

Задача 4. Докажите, что точка пересечения высот остроугольного треугольника является центром окружности, вписанной в треугольник с вершинами в основаниях высот. Самостоятельно сформулируйте и докажите аналогичную теорему для тупоугольных треугольников.

Задача 5. На отрезке AB как на диаметре построена окружность. Через точку M на плоскости проведены прямые AM и BM, пересекающие окружность в точках K и L (отличных от A и B). Пусть N – точка пересечения прямых AL и BK. Найдите угол ANB, если $\angle AMB = \alpha$.

Задача 6. В некотором треугольнике точка пересечения высот лежит на одной окружности с основаниями двух биссектрис и вершинами, из которых выходят указанные биссектрисы. Найдите углы этого треугольника.

Задача 7. В некотором треугольнике центр описанной окружности лежит на одной окружности с основаниями двух биссектрис и вершинами, из которых выходят указанные биссектрисы. Найдите углы этого треугольника.

2. Признак вписанного четырёхугольника

Из всех известных критериев вписанности четырёхугольника важнейшим является следующее обобщение теоремы 2.

Теорема 3. Точки A, B, C и D лежат на одной окружности, если и только если выполнено любое из следующих равенств:

$$\angle ABD = \angle ACD \qquad (1)$$

(при условии, что точки B и C лежат по одну сторону от прямой AD) или

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ \qquad (2)$$

(при условии, что точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC).

Заметим, что так как сумма углов любого треугольника равна 180°, а сумма углов любого четырёхугольника равна 360°, вместо равенств (1) и (2) можно соответственно написать

$$\angle BAC + \angle ACD = \angle ABD + \angle BDC \qquad (3)$$

и $\angle ABC + \angle ADC = \angle BAD + \angle BCD$. (4)

Проверьте самостоятельно эквивалентность равенств (1) и (2) равенствам (3) и (4).

Важность такой переформулировки в том, что равенства (3) и (4) никак не зависят от утверждения о сумме углов треугольника и, следовательно, могут выполняться и в неевклидовой геометрии. Значит, если в формулировке теоремы 3 вместо (1) и (2) использовать равенства (3) и (4), то она становится утверждением абсолютной геометрии (т. е. геометрии, не использующей 5-го постулата Евклида!). Более того, её можно доказать независимо от свойств параллельных линий. Ниже мы приведём такое доказательство. Поэтому ра-

[1] Задачи 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12-19 – для самостоятельного решения.

венства (3) и (4) являются признаками вписанности четырёхугольников не только на обычной евклидовой плоскости, но и на сфере, и на плоскости Лобачевского!

Но сначала дадим для сравнения наиболее простое доказательство теоремы 3, которое можно найти в большинстве курсов элементарной геометрии.

Первое доказательство. Очевидно, что если точки A, B, C и D лежат на одной окружности, то равенства обеих частей нашей теоремы выполнены (это следует непосредственно из теоремы 1). Таким образом, надо доказать лишь обратное утверждение: если выполнено любое из равенств (1) и (2), то четыре указанные точки лежат на одной окружности.

Итак, предположим, что для точек A, B, C и D выполняется равенство (1). Опишем окружность около треугольника ABD. Если точка C лежит на ней, то утверждение теоремы выполнено, доказывать ничего не надо. В противном случае, обозначим точку пересечения этой окружности с прямой AC буквой C'. Можно считать, что точка C' лежит между A и C (см. рис. 5).

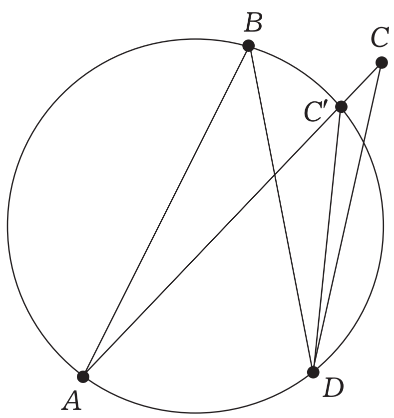

Рис. 5

Рассмотрим четырёхугольник $ABC'D$. Все четыре его вершины лежат на одной окружности, поэтому для них выполняется равенство (1), $\angle ABD = \angle AC'D$. Но, согласно условию, $\angle ABD = \angle ACD$, следовательно, $\angle ACD = \angle AC'D$. Но из этого следует, что $AC \parallel AC'$, чего не может быть.

Если же вместо равенства (1) для точек A, B, C и D выполнено равенство (2), доказательство по существу не изменится (см. рис. 6): из равенства (2) следует что прямые DC и DC' параллельны, что противоречит 5-му постулату Евклида.

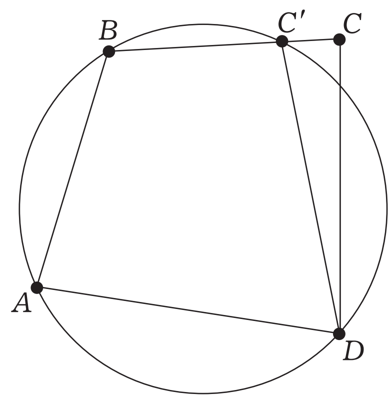

Рис. 6

Такое или почти такое доказательство должно приходить на ум любому ученику средней школы. При всей своей элементарности, оно имеет много недостатков. Уже одно то, что это доказательство идёт «от противного», может многим не понравиться. В математике существует целое течение (так называемая конструктивная математика), которое не признаёт подобных доказательств! Но это не самый главный его недостаток. Главное состоит в том, что приведённое рассуждение сильно зависит от свойств углов треугольника и, значит, никак не может быть применено в неевклидовом случае! Поэтому мы приведём теперь второе, конструктивное, доказательство, основанное только на свойствах равнобедренного треугольника, не зависящих от свойств параллельных линий.

Второе доказательство. Пусть для точек A, B, C и D выполняется равенство (3). Докажем существование описанной окружности у четырёхугольника $ABCD$. Обозначим буквой K точку пересечения отрезков BD и AC (см. рис. 7). Пусть, для определённости, $\angle ABD > \angle BAC$. Перепишем равенство (3) в следующем виде:

$$\angle ABD - \angle BAC = \angle ACD - \angle BDC.$$

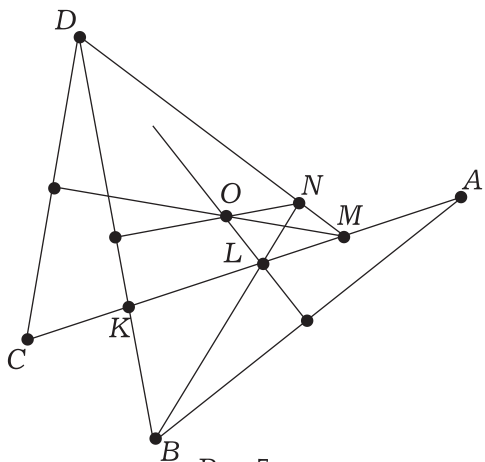

Рис. 7

Проведём теперь из точки B луч BL (точка L лежит на AC) так, что $\angle ABL = \angle BAC$, а из точки D – луч DM (M – точка на AC) так, что $\angle MDC = \angle ACD$.

Пусть N – точка пересечения лучей BL и DM (см. рис. 7). Тогда

$$\angle DBL = \angle ABD - \angle ABL = \\ = \angle ABD - \angle BAC = \angle ACD - \\ - \angle BDC = \angle MDC - \angle BDC = \angle BDM.$$

Таким образом (см. рис. 7), у нас образовались три равнобедренных треугольника: ALB, BND и CMD. Следовательно, серединные перпендикуляры к отрезкам AB, BD и CD являются одновременно биссектрисами углов ALB, BND и CMD. Но эти углы являются внешними ($\angle BND$ и $\angle ALB = \angle CLN$) и внутренними ($\angle CMD$) углами треугольника LMN. Следовательно, их биссектрисы пересекаются в одной точке – центре вневписанной окружности треугольника LMN. Эта точка, будучи одновременно точкой пересечения серединных перпендикуляров, равноудалена от всех вершин четырёхугольника $ABCD$ и, следовательно, является центром описанной окружности этого четырёхугольника.

Пусть теперь вместо равенства (3) выполняется равенство (4).

Положим, для определённости, что $\angle ABC > \angle BAD$ и перепишем (4) в виде $\angle ABC - \angle BAD = \angle BCD - \angle ADC$. Теперь достаточно отложить от прямой AB в точке B угол, равный углу BAD, а от CD в точке C – угол, равный ADC (см. рис. 8). Мы опять получим три равнобедренных треугольника, только на этот раз все три биссектрисы углов при вершинах этих треугольников будут являться биссектрисами внутренних углов треугольника LMN (см. рис. 8).

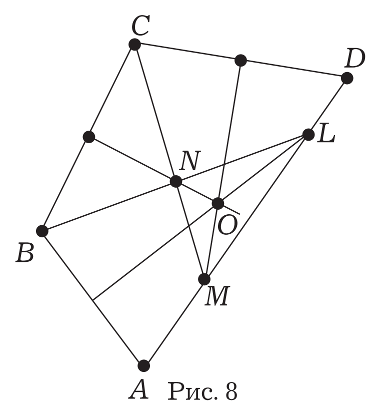

Рис. 8

Конечно, доказанная теорема – не единственный признак вписанного четырёхугольника. Существует очень много других полезных утверждений такого же рода. Перечислить их все было бы просто невозможно. Некоторые из таких утверждений мы приведём ниже в качестве задач.

Задача 8. Докажите, что в любом треугольнике отношение длины любой стороны к синусу противоположного угла равно диаметру описанной окружности (обобщённая теорема синусов). Используйте это утверждение для доказательства теоремы 3.

Задача 9. Докажите, что если диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K и при этом выполняется равенство $AK \cdot KC = BK \cdot KD$, то этот четырёхугольник можно вписать в окружность. И наоборот, если четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность, то это равенство выполняется.

Задача 10. Докажите, что если продолжения сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке L и при этом выполняется равенство $AL \cdot LB = CL \cdot LD$, то этот четырёхугольник можно вписать в окружность. И наоборот, если четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность, то это равенство выполняется.

3. Описанные четырёхугольники

Перейдём теперь к рассмотрению *описанных* четырёхугольников, т.е. четырёхугольников, у которых существует окружность, касающаяся всех четырёх сторон – *вписанная окружность*. Как и в случае описанной окружности, далеко не для любого четырёхугольника такая окружность существует. В самом деле, пусть $ABCD$ – такой четырёхугольник (см. рис. 9). Пусть K, L, M и N – точки касания его сторон с вписанной окружностью. Тогда, в силу равенства отрезков касательных, проведённых из одной и той же точки к одной и той же окружности, получаем следующие равенства:

$AK = AN,\ BK = BL, CL = CM, DM = DN.$

Но из этого следует, что

$$AB + CD = (AK + BK) + (CM + DM) =$$
$$AN + BL + CL + DN = (AN + DN) =$$
$$= (BL + CL) = AD + BC, \text{ т.е.}$$

$$AB + CD = AD + BC. \qquad (5)$$

Таким образом, для любого описанного четырёхугольника суммы противоположных сторон равны.

Очевидно, что это условие выполняется далеко не для всех четырёх-

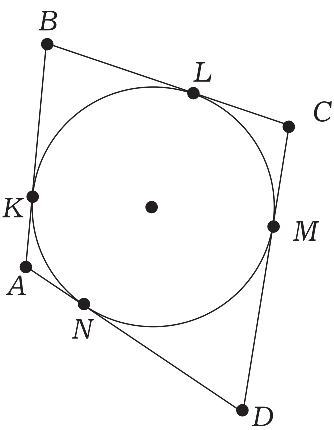

Рис. 9

угольников. Но не это самое главное. На самом деле равенство (5) не только необходимо, чтобы четырёхугольник был описанным, но и достаточно для этого!

Иными словами, равенство (5) – критерий описанного четырёхугольника. Более того, то же самое будет справедливо и в неевклидовой геометрии!

Однако, прежде чем доказывать последнее утверждение, приведём ещё два аналогичных равенства, которые тоже могут оказаться полезными во многих ситуациях.

Рассмотрим для этого рис. 10. Пусть P и Q – точки пересечения продолжений сторон четырёхугольника $ABCD$, а K, L, M и N, как и прежде, точки касания вписанной окружности со сторонами четырёхугольника. Тогда, в дополнение к записанным выше равенствам, будем иметь равенства $PL = PN$ и $QK = QM$. Поэтому:

$$PB + QD = (PL - BL) + (QM + DM) =$$
$$= PN - BK + QK + DN = (QK - BK) +$$
$$+ (PN + ND) = QB + PD.$$

Таким образом,

$$PB + QD = QB + PD. \qquad (6)$$

Аналогично можно показать, что для описанного четырёхугольника выполняется равенство

$$PA + QA = PC + QC. \qquad (7)$$

Как вы, наверное, уже догадались, мы не зря привели равенства (6) и (7). Эти равенства – тоже критерии существования вписанной в четырёхугольник окружности! Сформулируем это в виде теоремы.

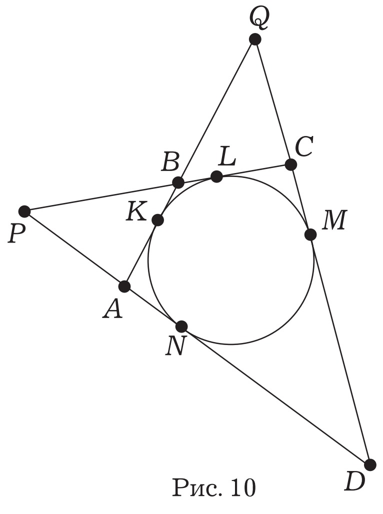

Рис. 10

Теорема 4. Для того, чтобы в четырёхугольник $ABCD$ можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено хотя бы одно из равенств (5), (6) или (7). Отсюда следует, в частности, что все эти равенства эквивалентны друг другу.

Доказательство. Как и в случае теоремы 3, существует множество различных доказательств этого утверждения. Например, рассмотрим рис. 11 и предположим, что в четырёхугольнике $ABCD$ выполнено равенство (5). Если окружность, касающаяся AB, BC и AD, как показано на рисунке (такая окружность существует всегда), не будет касаться стороны CD четырёхугольника, то мы сможем провести к ней через точку C касательную CD'. Так как в четырёхугольник $ABCD'$ вписана окружность, то для него выполняется равенство, аналогичное (5):

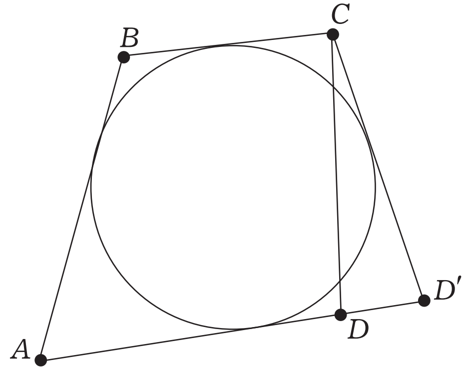

Рис. 11

$$AB + CD' = BC + AD'.$$

Вычитая это равенство из (5), получаем $CD' - CD = DD'$. Но это противоречит неравенству треугольника для CDD'!

Значит, треугольник CDD' вырожден, точка D совпадает с точкой D', а следовательно, в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

Приведённое доказательство идейно очень похоже на первое доказательство теоремы 3. Правда, в отличие от случая вписанного четырёхугольника, оно не зависит от пятого постулата Евклида. (Неравенство треугольника, как несложно понять, – утверждение абсолютной геометрии.) Но оно является доказательством «от противного», что многие отвергают. Поэтому приведём ещё одно доказательство теоремы 4.

Второе доказательство. Пусть для рассматриваемого четырёхугольника $ABCD$ выполняется равенство (6). Перепишем его в виде $PD-BP=QD-QB$ (можно считать, что оба эти выражения положительны) и отметим на AD точку M такую, что $PM=PB$, а на QD – точку N такую, что $QN=QB$. Тогда

$$\begin{aligned} DM&=PD-PM=PD-PB=\\ &=QD-QB=QD-QN=DN. \end{aligned} \tag{8}$$

Посмотрим на рис. 12. На нём образовались три равнобедренных треугольника: DMN, PBM, и QBN. Как

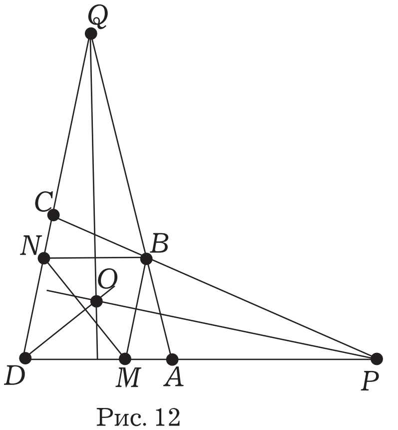

Рис. 12

известно, в равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая из вершины, является одновременно высотой и медианой треугольника. В частности, из этого следует, что биссектрисы углов NDM, MPB и BQN являются серединными перпендикулярами к отрезкам MN, BM и BN соответственно. Но эти отрезки – стороны треугольника BMN, следовательно, соответствующие серединные перпендикуляры должны пересекаться в одной точке – центре описанной окружности этого треугольника. Поскольку эта точка лежит на биссектрисе угла CDA, она равноудалена от прямых AD и CD. А так как она лежит на биссектрисе угла DPC, она равноудалена от прямых AD и BC. Наконец, из того, что она лежит на она биссектрисе угла DQA, заключаем, что равноудалена от прямых CD и AB, то есть она равноудалена от всех сторон четырёхугольника $ABCD$ и, следовательно, является центром вписанной окружности этого четырёхугольника.

Обратите внимание на то, что в случае описанной окружности четырёхугольника мы использовали вписанную (или вневписанную) окружность треугольника, а в случае вписанной окружности четырёхугольника – описанную окружность треугольника. Таким образом, при переходе от треугольника к четырёхугольнику вписанные и описанные окружности как бы меняются местами. Было бы интересно проследить эту закономерность в многоугольниках с большим числом сторон. Но это – задача для будущих исследований. Мы же закончим нашу статью примерами применения изученных нами признаков описанного четырёхугольника.

Задача 11. Докажите, что если в четырёхугольники 1 и 3 на рис. 13 можно вписать окружность, то можно вписать окружность и в весь четырёхугольник $ABCD$.

Решение. Воспользуемся критерием из теоремы 4: так как в четырёхугольник 1 можно вписать окружность, то выполняется равенство

$$PB + QS = QB + PS, \text{ или}$$
$$PB - QB = PS - QS.$$

Аналогично, так как в четырёхугольник 3 тоже можно вписать окружность, выполняется равенство

$$PS + QD = QS + PD, \text{ или}$$
$$PS - QS = PD - QD.$$

Сравнивая эти два выражения, получаем

$$PB - QB = PD - QD, \text{ или}$$
$$PB + QD = PD + QB.$$

Таким образом, для четырёхугольника $ABCD$ выполняется критерий (6), значит, в него можно вписать окружность.

Закончим статью несколькими задачами, в которых используются изученные нами идеи.

Задача 12. Докажите, что для описанного четырёхугольника выполняется равенство (7).

Задача 13. Используйте рассуждения, аналогичные рассуждению, следующему за рис. 11, чтобы доказать существование вписанной окружности в случае, когда вместо равенства (5) выполняется (6) или (7).

Задача 14. Докажите, что для существования окружности, вписанной в многоугольник с чётным числом сторон, необходимо, чтобы суммы длин сторон этого многоугольника, взятых через одну, были равны (т.е. чтобы сумма длин первой, третьей, пятой и т. д. сторон была равна сумме длин второй, четвёртой, шестой и т. д. сторон). Какие равенства можно получить, если рассматривать точки пересечения продолжений сторон этих многоугольников?

Задача 15. Докажите, что если в четырёхугольники 2 и 4 на рис. 13 можно вписать окружность, то то же самое справедливо и для четырёхугольника $ABCD$.

Задача 16. Докажите, что в обозначениях теоремы 4 равенства

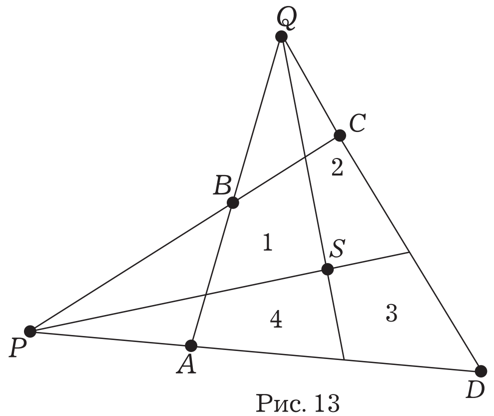

Рис. 13

$$AD + AB = CB + CD,$$
$$PB + PD = QB + QD,$$
$$PA + PC = QA + QC$$

эквивалентны друг другу. Указание: докажите, что эти равенства эквивалентны существованию окружности, касающейся продолжений сторон четырёхугольника $ABCD$.

Задача 17. Пусть длины сторон треугольника ABC раны a, b, c $(AB = c, BC = a, CA = b)$. Найдите длины отрезков, на которые стороны треугольника делятся точками касания:

а) со вписанной окружностью,

б) со вневписанными окружностями.

Задача 18. Найдите длину радиусов вписанной и трёх вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с катетами a, b и гипотенузой c.

Задача 19. Пусть $ABCD$ – описанный четырёхугольник. Рассмотрим окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD. Докажите:

а) что эти окружности касаются друг друга,

б) что точки касания этих окружностей со сторонами четырёхугольника лежат на одной окружности.